CIENCIA Y SOCIEDAD
Volumen XIII, Número 2
Abril - Junio 1988

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA PRIMERA ETAPA DE LA GENESIS DEL ANALISIS INFINITESIMAL

CORIDES PEREZ

El análisis matemático, tan necesario para la formación del técnico y del ingeniero de hoy, es un producto refinado de lo que puede ser considerada la obra maestra del siglo XVII. La última etapa de su gestación se inicia con los trabajos de Fermat, relativos a la determinación de las tangentes a las curvas, al cálculo de las cuadraturas de curvas y al cálculo de cuestiones de máximos y mínimos mediante el método que llama "adegalité" que desborda el rígido marco del principio de identidad y que culmina con el descubrimiento por parte de Leibniz y de Newton, de los ya presentidos teoremas fundamentales del cálculo, que establecen la inusitada relación (de funciones inversas) entre la tangente y el área bajo la curva.

Leibniz y Newton, hombres de extraordinario genio, arribaron al descubrimiento del cálculo por caminos diferentes, pero como tenían relación, aunque precaria, a través de intermediarios, Newton creyó que la idea para la formulación del teorema la había sustraído Leibniz de algunos de sus escritos y esta acusación del plagio originó una controversia tan acerba que se prolongó por más de un siglo y terminó dividiendo a las naciones europeas. Es en verdad no del todo injustificable negarse a admitir que los trabajos e investigaciones de estos hombres extraordinarios, trillando caminos diferentes (Leibniz en Geometría y Newton en Mecánica y Astronomía) convergieran a un punto común en el descubrimiento del cálculo infinitesimal, el descubrimiento llamado a provocar la más profunda revolución de los patrones del pensamiento científico y matemático, y a trazar las pautas para los métodos de investigación de los ingenieros y técnicos que le sucedieron hasta el día de hoy. En esto hay que reconocerle a Newton un gran acierto al hacer en "Principia" una formidable aplicación de los nuevos cálculos a la Física y a la Mécanica, y la concepción de un modelo astronómico que explica el movimiento de los astros en término de las cosas y relaciones conocidas en la tierra sin la necesidad del recurso místico.

Es claro, que el cálculo infinitesimal no es obra exclusiva, como se ha sugerido al principio, de los genios de Leibniz y de Newton, más bien es un producto de la historia, cuyos antecedentes los podemos encontrar en los pitagóricos y, con más precisión, en uno de los descubrimientos que más los humillaron y los desconcertaron: el descubrimiento de los irracionales, consecuencia natural de su teorema más famoso: "El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos", al ser aplicado al triángulo más simple de la especie: al triángulo rectángulo isósceles de cateto igual a la unidad.

Para los pitagóricos la naturaleza, el universo entero, todos los casos matemáticos, físicos y metafísicos estaban fundamentados sobre el modelo discreto de los números enteros: "Dios es número" declaraban.

Veamos lo que hizo quebrantar su teoría: la razón entre un lado de un cuadrado y su diagonal es inexpresable en términos de los números enteros, resultado inusitado que inflige un golpe letal a la base filosófica de los pitagóricos y cuya esencia no presenta nada simple que pueda conciliar con el ideal de la "verdad simple y bella" que Pitágoras había logrado conformar como eje central del pensamiento griego. Ante el desconcertante resultado se decreta el silencio, ¡la absoluta discreción para no provocar la ira de los dioses! En medio de esta angustia metafísica que afecta a los pitagóricos, surgen las contradicciones y uno de los miembros, Hipaso, al ser expulsado revela el secreto sobre el descubrimiento del primer número irracional y arremete contra los pitagóricos en su obra **Logos Místicos** en la que desfigura la significación del simbolismo que se enseñaba a los iniciados y se convierte en jefe de la secta de los acusmáticos opuesta a los matemáticos, quienes se consideraban únicos depositarios del pitagorismo. Las luchas tienen categoría política y Pitágoras se ve obligado a huir de Cretona a Metaponte, donde murió hacia el año 500 a.C. En cuanto a Hipaso dice la leyenda que pereció en un naufragio por haber revelado lo que siempre debió pemanecer oculto; pero su sacrificio -si la leyenda es cierta- no fue estéril porque el conocimiento del número irracional llegó a Zenón, quien al amparo de los irracionales somete al pitagorismo a una revisión crítica donde pone en evidencia las debilidades de los fundamentos filosóficos del idealismo estructurado sobre el supuesto pitagórico de que "la verdad, la belleza y el bien deben ser buscados en la unidad, en lo finito y en el reposo".

En esta empresa, hace un uso ingenioso del método de reducción al absurdo y, con una fuerza dialéctica nunca superada, desconcierta a los filósofos griegos con "cuatro inocentes paradojas" que aquellos no podían refutar.

En las dos primeras, Zenón se muestra contrario a la división, prolongada hasta el infinito del segmento recta, dando asomo a la idea del número irracional; pero no da el paso definitivo hacia la "completitud"; por el contrario, sucumbe ante el peso de los prejuicios instaurados por el racionalismo griego y lo que pudo ser la más excelsa victoria, al abrir una brecha al porvenir, se convierte en una lamentable derrota, perdiendo un terreno que le costaría a la humanidad más de 20 siglos de espera para poder reconquistarlo.

Las dos últimas parecen tener el mismo contenido, pero con mayor complejidad. En todo caso, "estas paradojas constituyen un muro a través del cual es imposible progresar".

Eudosio de Cnido (408-355 a.C.) opone a la hipótesis de Zenón el método de exhausión, que aunque artificioso, abre una puerta al transcurso de la creación matemática y que posteriormente Arquímedes supo aprovechar, obteniendo con él resultados similares a los del Cálculo Integral y Diferencial Moderno.

Eudosio propone el método de exhausión en los términos siguientes: "Si a una magnitud se le quita su mitad o más de su mitad y se repite esta operación un número suficiente de veces, se puede conseguir una magnitud menor que cualquier otra dada de la misma especie".

Arquímedes reformula esta propuesta del siguiente modo: "Dadas dos magnitudes desiguales se puede alcanzar y superar la mayor repitiendo la menor un número suficiente de veces". Esta proposición que hoy conocemos bajo el nombre de Axioma de Arquímedes, no es otra cosa que la forma primaria del Axioma de Continuidad. Pero el método de exhausión requiere de antemano conocer la propiedad por demostrar, lo que revela su carácter deductivo. Es, en consecuencia, un método de demostración, no de descubrimiento. Así, los irracionales dividieron a los griegos en dos fracciones irreconciliables. Una, la que encabeza Zenón, se detiene en medio del camino y desiste de llegar hasta el análisis y, la otra, que representa Eudosio, intenta vencer las dificultades y lo logra convenciéndose a sí mismo de lo que ha logrado.

El sentido crítico emerge en las hipótesis de los analistas de los siglos XIX y XX: Kronecker y Brower recuerdan a Zenón y las teorías sobre la continuidad y el infinito de Weierstrass, Dedekind y Cantor convierten a Eudosio, con su definición de razones iguales, en su antecesor.

Arquímedes (287-232 a.C.), el más excelso científico y matemático griego y el más profundo de los sabios de la antiguedad clásica, fue el que mayor independencia logró de las líneas de pensamiento impuestas por los filósofos y conjuga y coordina en perfecta armonía lo que ven los ojos de la cara con lo que ven los ojos de la inteligencia: los unos para contemplar la naturaleza y descubrir sus leyes y los otros para hacer progresar la matemática tomando como punto de partida los datos suministrados por la visión natural. Es el primero en darse cuenta de que el mundo exterior es un profundo hontanar del que emana todo conocimiento.

Su condición de genio y su originalidad inigualable hacen necesario tener una profunda formación matemática para entender sus extensas aportaciones, lo que explica el hecho de haber permanecido ignorado hasta casi la época del Renacimiento, lo cual fue una verdadera desgracia para el avance de la ciencia y de las matemáticas.

Su producción lo revela exclusivamente como un investigador. Sus escritos son verdaderas memorias científicas. Todos son originales y representan una contribución, un método y una idea nueva.

En su obra **De la medida del círculo** violenta las limitaciones de la matemática griega frente a la logística y a la separación entre la aritmética práctica y la geometría. En un alarde técnico combina admirablemente la matemática exacta y la aproximada y encamina en nueva dirección el clásico problema de la cuadratura del círculo. Otros escritos de Arquímedes son:

1. **De la esfera y del cilindro**, que resulta ser un complemento de los **Elementos** de Euclides en lo referente a la geometría del espacio.

2. **De los conoides y de los esferoides**, donde trata de los sólidos obtenidos por rotación, alrededor de uno de sus ejes, de las tres cónicas y que hoy preferimos obtener con el auxilio del cálculo integral.

3. **De las espirales.**

4. **Cuadratura de la parábola.**

5. **El arenario.**

6. Del equilibrio de los planos o de los centros de gravedad de los planos.

7. De los cuerpos flotantes.

8. Método.

Este último trabajo es un interesante aporte a la psicología de la investigación científica donde Arquímedes se acerca extraordinariamente al concepto actual del Cálculo Integral.

Sin dudas, Arquímedes es el más directo de los precursores del Cálculo Diferencial y del Cálculo Integral, y al morir asesinado por un soldado del ejército de Marcelo, las matemáticas se sumen en un letargo de más de 15 siglos hasta que las necesidades del Renacimiento las vuelven a despertar y se reinicia una época de gloria que culmina con el descubrimiento de los teoremas fundamentales del Cálculo por Leibniz y Newton.

En el transcurso de este período se encuentra presente el pensamiento director de Arquímedes, tal como lo encontramos en las obras de Viéte, Kepler y Cavalieri cuando extienden claramente a relaciones de orden irracional la consideración del infinito que Arquímedes había aplicado en el orden racional a la cuadratura de la parábola.

En las profundas meditaciones teóricas sobre la génesis de las figuras geométricas, Cavalieri propone, conforme con el espíritu que dominaba las investigaciones infinitesimales de Arquímedes, que el cilindro y el cono al ser cortados por planos paralelos a la base tendrán la misma proporción que sus elementos generadores, que llama indivisibles, y de donde surge una nueva técnica de cuadraturas y cubicaciones. Esta consistirá en descomponer las superficies y los volúmenes en elementos característicos obtenidos mediante las secciones paralelas a la base y determinar así la razón de magnitudes desconocidas respecto a magnitudes conocidas. Mientras el método de exhausión opera sobre las propias figuras, el método de los indivisiles sustituye las figuras dadas por la suma de una infinidad de elementos que tienen una dimensión menor. Esta sustitución que puede sorprender a los profanos, resulta perfectamente natural para la inteligencia geométrica. Así, Pascal lo convirtió en un método directo y fecundo que le permitió resolver problemas que supondrían en un sabio moderno el conocimiento de las integrales doble.

En este período se desarrolla el Algebra y su deficiencia en épocas anteriores fue sin duda lo que dificultó el advenimiento del Cálculo Infinitesimal y en este sentido las aportaciones de Descartes fueron decisivas. Con su geometría analítica, Descartes recobra el movimiento y la acción que los griegos, a través del platonismo, se empeñaron en despojar de la matemática; y esta acción y movimiento obligan a que la matemática griega ceda el paso a la matemática moderna, tomando de ella todo lo que había que preservar y sobre este acervo se genera una serie de fecundos descubrimientos que no sólo dieron al traste con el descubrimiento del Cálculo, sino que culminaron con el descubrimiento de la estructura de grupos.

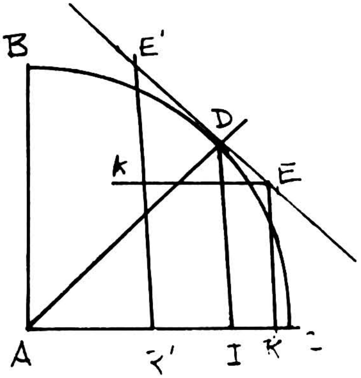
En 1629, Fermat propone un método para el cálculo de máximos y mínimos de una función y este método parece haber desempeñado un papel decisivo como podemos advertir en su formulación: "Considere la función $F(x)$ y sustituya a x por $x + h$; iguala a $F(x)$ y $F(x + h)$. Simplifique la igualdad suprimiendo los términos comunes y divida por h. Haciendo $h = 0$, la ecuación permite despejar a x". Método infalible añade Fermat, y susceptible de aplicarse a la mayor parte de los problemas. En este artificio asoma el concepto de incremento y su valor límite cuando h tiende a 0, es decir, la derivada, pero Fermat no llegó a tener la idea de límite, de modo que resulta artificiosa, aunque genial, su determinación de tangente reducida a un problema de máximo. Este método fue generalizado por Barrow y llevado por Leibniz al más alto grado de claridad y de generalidad, al hacer de la igualdad un caso particular de la desigualdad en su justificación del cálculo de infinitésimos por el Algebra Ordinaria, en 1702.

Pascal le facilita a Leibniz el descubrimiento del nuevo algoritmo, que habría de permitir un rápido e intensivo desarrollo del análisis infinitesimal.

Leibniz, unos 10 años después de la muerte de Pascal, tuvo conocimiento de los escritos de Dettonville, a través de Huygens, quien se los hizo llegar.

"Al leer el tratado acerca de los senos del cuadrante del círculo", escribe más tarde al Marqués de L'Hospital, "he encontrado en él una luz que el propio autor no había percibido en absoluto". Leibniz se refiere al siguiente pasaje: "Sea ABC un cuadrante del círculo cuyo radio AB se considera como eje Y, y el radio perpendicular AC como base. Sea D un punto cualquiera en el arco desde el cual llevamos al seno DI sobre el radio AC, y DE la tangente sobre la cual se toman los puntos E y E' dondequiera, a partir de los cuales se trazan las perpendiculares ER sobre el radio AC; yo digo que el rectángulo comprendido por el seno DI y la tangente EE' es igual al rectángulo comprendido por la porción de la base (entre las paralelas) y el radio AB". Esto es: $\overline{AB} \cdot \overline{RR'} = \overline{DI} \cdot \overline{EE'}$

Pascal, en esta proposición, no ve más que un lema que le permite establecer el teorema siguiente: "La suma de los senos de un arco de cuadrante de un círculo es igual a la porción de la base comprendida entre los senos extremos multiplicado por el radio", caso particular de la proposición: "La primitiva del seno X es - coseno X".



Leibniz, por el contrario, sabe extraer de este ejemplo particular toda su generalidad. Considera el triángulo E k E' por sí mismo. Aprecia el interés que se puede obtener de su semejanza con el triángulo AID, el cual, cualesquiera que sean los puntos E y D', conserva siempre su dimensión finita o como dice él, permanece asignable. Así, cuando hagamos tender a cero la longitud EE', el Δ E k E' tenderá hacia cero en todas sus dimensiones (se hará inasignable), pero permanecerá siempre semejante al Δ AID que es fijo. Leibniz ve en este hecho la posibilidad de estudiar este triángulo formado por parte infinitamente pequeña de la tangente y las porciones infinitamente pequeñas de las paralelas a la abscisa y a la ordenada como un elemento característico; es el primer paso dado por Leibniz fuera del método de los invisibles y permite restablecer la homología rota en apariencia por este método: de ahora en adelante, una línea se considerará formada por elementos lineales, una superficie por elementos de dos dimensiones y un volumen por corpúsculos. El triángulo característico conduce a Leibniz al problema inverso de la tangente y evidencia la analogía de este problema con el de las cuadraturas o el de las rectificaciones de curva ¿En qué consiste el problema inverso de las tangentes?

Intentaremos dar una respuesta a esta pregunta a través de un caso particular: Las tangentes a una circunferencia son perpendiculares al radio que contiene al punto de tangencia. El problema inverso consiste en demostrar que toda curva cuyas normales pasan por un punto fijo es una circunferencia.

Leibniz se incorpora luego a la escuela de Descartes, de donde extrae la sencillez y la generalidad. Bajo esta influencia en la obra **Nova methodus pro maximis et mínimis**, publicada en 1684, define la noción diferencial, que aún se conserva y que había descubierto 10 años antes dé leer los escritos de Dettonville. Luego, resultó natural que un hombre del ingenio de Leibniz se planteara el problema inverso, que es la integración.

Esta relación que se conoce con el nombre de teorema fundamental del cálculo es la culminación de más de 20 siglos de trabajo intelectual de los hombres más geniales de cada época y cuyo punto de partida lo podemos ubicar en las cuadraturas investigadas por Arquímedes. Otros contemporáneos habían llegado a las mismas conclusiones de modo que en eso podían compartir la gloria; pero le corresponde el mérito extra de haber creado una excelente notación cuya claridad irreprochable facilitó la incorporación de muchos hombres a la actividad y al desarrollo de las ciencias y de las matemáticas.

Tal como hemos visto, problemas suscitados en la geometría condujeron a la ulterior creación del cálculo sin salirse del terreno puramente geométrico; pero hubo otro camino, libre del lastre y de los escrúpulos a que estaba sometida la geometría clásica que condujo a su aparición y que conforman la mas bella y profunda expresión de la naturaleza de las cosas, cuya perfección habría que buscarla en su propia imperfección, en el desequilibrio, causa del cambio continuo que afecta la existencia. Vía donde las ideas adquieren la forma de las cosas afectadas del saludable espíritu deportivo de la superación y que de alguna forma evoca sin proponérselo, las ideas y figura de Heráclito. Se trata del camino seguido por Newton, de su método de la serie y de sus cantidades que nacen y se desvanecen.

I. Newton (1643-1727), unió a su extraordinario genio creador sus profundos conocimientos de la matemática clásica y contemporánea y en fecunda interrelación desarrolló una labor científica tan extraordinaria que sirvió de modelo a casi la totalidad de las generaciones de los científicos e ingenieros que le sucedieron. Su influencia, tres siglos después, es refrescantemente perceptible. Este genio singular concibe la matemática como el más poderoso y eficaz de los instrumentos para investigar y desentrañar los problemas que sobre la naturaleza se plantean y en ese sentido se expresa en el prefacio de **Principia**: "Presento esta obra como los principios matemáticos de la filosofía porque toda teoría de ésta parece consistir en investigar, a partir de los fenómenos del movimiento, las fuerzas de la naturaleza, y luego a partir de estas fuerzas, demostrar los restantes fenómenos".

A través de su obra, extensa, profunda y de admirable belleza, hace uso continuo de la matemática para resolver los problemas más complicados de la Física, de la Astronomía y de la propia Matemática, empleando, según las circunstancias, los métodos siguientes:

1. El método de las fluxiones (flujo constante de una función continua).

2. El método de las cantidades que nacen y se desvanecen.

3. El método de las series.

4. El método de la interpolación.

En la publicación de las obras de Newton existe un problema de inversión cronológica. Primero publica los resultados y luego los métodos y esto tal vez sea parte de su ingenio, pues los resultados son pruebas irrebatibles de la fecundidad de los métodos que posteriormente se encarga de exponer.

El método de las fluxiones es resumido por el propio Newton en su **Tratado de las cuadraturas de las curvas** como sigue: "No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que sean, sino descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos, la superficie por el movimiento de líneas, los sólidos por el movimiento de superfices, los ángulos por la rotación de sus lados, los tiempos por el fluir constante; y lo mismo los otros. Considero pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales, son mayores o menores, según que crezcan con mayor o menor velocidad, busqué un método para determinar las magnitudes por las velocidades de los movimientos o crecimientos que los engendran; y llamando fluxiones a la velocidad de estos movimientos o crecimientos, mientras que las magnitudes engendradas toman el nombre de fluentes, dí con el método de las fluxiones".

En el método de las primeras y últimas razones "según se consideran variables crecientes o decrecientes, se buscan los límites superiores o inferiores hacia los cuales tienden los crecimientos o decrecimientos; la última razón de las cantidades que disminuyen, no antes de desvanecerse ni después de haberse desvanecido, sino las que tienen en el momento en que desvanecen... De la misma manera, la primera razón de las cantidades nacientes es la de las cantidades que aumentan en el momento en que nacen y la primera y la última suma de esas cantidades es la que corresponde al comienzo o al fin de su existencia, es decir, en el momento en que empiezan a aumentar o en que cesan de disminuir".

El método de las series infinitas fundamentadas en la idea de aproximación fue decisivo para el descubrimiento del Cálculo infinitesimal y en esto los aportes de Newton le confirieron, a las series, el rigor racional necesario para no violentar los escrúpulos de la tradición del pensamiento matemático instaurado por los griegos y de este modo se introduce el infinito al mundo de las matemáticas después de una prolongada espera de más de 20 siglos que se inició con el método de aproximación racional exhaustiva de Eudosio y con los trabajos de Arquímedes: La completitud, de hecho queda establecida y la extrema fecundidad de las series, se manifiesta de inmediato al posibilitar representar funciones hasta trascendentes por medio de expresiones algebraicas convencionales, del mismo modo que había hecho posible la representación de un número irracional por medio de expresiones aritméticas convergentes.

El método de interpolación, que según Newton es "quizás el más hermoso de todos aquellos cuya solución deseaba" consiste en intercalar una curva, no importa la complicación, entre otras dos más simples cuyo conocimiento exacto permitirá calcular aproximadamente la curva buscada. La aproximación aumenta cuando aumenta el número de puntos comunes.

En cada uno de estos métodos afloran los conceptos que caracterizan los métodos y los resultados del análisis moderno. Así se ve el concepto de límite en el método de las primeras y últimas razones, la diferencial y la integral en el método de las fluxiones y en el método de las series y la continuidad es presentida en el método de la interpolación. Con estas aportaciones termina la primera etapa de la evolución del análisis que nos deja por legado una cantera de ideas, de métodos y de contenidos y, una estructura matemática cuya confirmación no requiere realmente de una confirmación experimental más bien si un experimento no concordara con los cálculos, nos inclinamos, indefectiblemente, a pensar que los experimentos están equivocados.